О методе решения задач на преобразование логических выражений, содержащих поразрядную конъюнкцию чисел

учитель информатики и ИКТ МБОУ Климовской СОШ №1

Волков А.Ю.

Задачи ЕГЭ на анализ выражения, содержащего поразрядную конъюнкцию чисел (задача №18), представляют значительную субъективную трудность для выпускников. Уже существует обширная методическая литература по этому вопросу (см. [Поляков], [Поляков2]). Ниже предлагается авторский метод решения таких задач. Рассмотрим метод на примере типичной задачи из демонстрационного варианта ЕГЭ 2017 года.

Задача. Обозначим через $m\&n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n. Так, например, $14\&5 = 1110_2\&0101_2 = 0100_2 = 4$.

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа А формула

$$x\&51 = 0 \lor (x\&41 = 0 \to x\&A \neq 0)$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

Решение.

1) Начнем решения с анализа логической формулы. Эта формула содержит 3 простых сравнения, связанных логическими связками дизъюнкции и импликации. Каждое из сравнений содержит переменную x, которая может принимать любые неотрицательные целые значения, и только одно из сравнений содержит неотрицательный целый параметр A. Чтобы упростить формулу избавимся от импликации. Для этого используем известное тождество

$$A \to B = \neg A \lor B$$

чтобы получить логическую формулу, содержащую только дизъюнкции (дизъюнктивную форму)

$$x\&51 = 0 \lor (x\&41 = 0 \to x\&A \neq 0) =$$
$$= (x\&51 = 0) \lor \neg(x\&41 = 0) \lor (x\&A \neq 0) =$$
$$= \big((x\&51 = 0) \lor (x\&41 \neq 0)\big) \lor \neg(x\&A = 0) \qquad (1)$$

В ходе преобразований были использованы известные тождества

$$\neg(a = b) = (a \neq b), \qquad \neg(a \neq b) = (a = b),$$

которые следуют из определения неравенства. Полученная формула (1) должна тождественно равняться единице при искомом значении параметра A. Это значит, что путем логических преобразований и замены переменных ее можно свести к известному тождеству $F \lor \neg F = 1$. Если ввести обозначение $F = (x\&A = 0)$, то для получения тождества из формулы (1) необходимо выполнение равенства

$$F = (x\&51 = 0) \lor (x\&41 \neq 0) \qquad (2)$$

2) Мы свели задачу к алгебраической: требуется решить логическое уравнение с параметром. Чтобы избавиться от операции поразрядной конъюнкции, необходимо представить каждое число в двоичной форме. Поскольку входящие в уравнения числа $51 = 32 + 16 + 2 + 1 = 110011_2$ и $41 = 32 + 8 + 1 = 101001_2$ являются шестиразрядными двоичными числами, мы можем ограничиться рассмотрением только шестиразрядных двоичных вариантов для x и A. Докажем это. Введем обозначения

$\alpha = (x\&51 = 0), \beta = (x\&41 \neq 0)$. Если число x представимо в семиразрядном двоичном виде

$$x = 64x_6 + 32x_5 + 16x_4 + 8x_3 + 4x_2 + 2x_1 + x_0$$

где $x_i \in \{0,1\};\ i \in Z; 0 < i \leq 6$, то поразрядную конъюнкцию можно свести к множеству обычных конъюнкций между разрядами чисел. Для того чтобы α было истинным, необходимо каждый единичный разряд числа 51 логически умножить на нулевой разряд в числе *x*. Аналогично, для того чтобы β было истинным, необходимо хотя бы один единичный разряд в числе 41 умножить на единичный разряд в числе *x*. Поэтому истинность логических переменных α и β будет определяться формулами

$$\alpha = (x_5 = 0) \wedge (x_4 = 0) \wedge (x_1 = 0) \wedge (x_0 = 0) \quad (3)$$

$$\beta = (x_5 = 1) \vee (x_3 = 1) \vee (x_0 = 1) \quad (4)$$

Видно, что эти формулы не зависят от разряда x_6, что и требовалось доказать.

3) Подставив (3) и (4) в (2) получим формулу

$$F = (x_5 = 0) \wedge (x_4 = 0) \wedge (x_1 = 0) \wedge (x_0 = 0) \vee (x_5 = 1) \vee (x_3 = 1) \vee (x_0 = 1) \quad (5)$$

которая зависит от переменных x_0, x_1, x_3, x_3, x_4, x_5. С другой стороны из определения F следует, что

$$F = \neg(a_0 \wedge x_0 \vee a_1 \wedge x_1 \vee \dots \vee a_5 \wedge x_5) \quad (6)$$

где $a_i \in \{0,1\};\ i \in Z; 0 < i \leq 5$ – двоичные разряды искомого параметра

$$A = 32a_5 + 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0$$

Мы можем найти некоторые из разрядов a_i, рассматривая частные случаи x_i. Если $x_5 = 1$, то согласно (5) $F = 1$. Тогда из (6) вытекает необходимость $a_5 \wedge x_5 = 0$, что вместе с $x_5 = 1$ приводит к требованию $a_5 = 0$. Аналогичным образом полагая переменные x_0, x_3 равными единице доказываем, что соответствующие разряды a_0, a_3 параметра А должны быть нулевыми.

Для того чтобы получить $F = 0$ мы должны согласно (5) подставить $x_0 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0$ и сделать один из разрядов x_1, x_4 равным единице. Положив дополнительно $x_1 = 1, x_2 = 0, x_4 = 0$, из (6) находим, что $F = \neg(a_1 \wedge x_1) = 0$ и, следовательно, $a_1 = 1$. Аналогичным образом, положив дополнительно $x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 1$, находим, что $a_4 = 1$.

Про разряд a_2 ничего сказать нельзя из-за того, что соответствующий ему разряд x_2 независимой переменной не входит в (5). Таким образом, искомое число должно иметь форму:

$$A = 010Y10_2$$

где $Y \in \{0,1\}$. Минимально возможное такое число – это число $A = 10010_2 = 18$, что и является ответом задачи.

Анализ результатов и метода. Решение задачи состоит из трех этапов: 1) сведение задачи к алгебраическому уравнению с параметром для булевых переменных; 2) исключение поразрядной конъюнкции путем перехода к двоичному представлению всех входящих в уравнение переменных; 3) анализ полученного уравнения специально подобранных точках для получения сведений о параметре. Первый этап требует только знаний основных законов алгебры логики и умения с их помощью преобразовывать выражение в нужно ключе. Результатом первого этапа является уравнение одной целочисленной переменной, в одной части которого находится сравнение, содержащее параметр, а во второй дизъюнктивная форма из сравнений, содержащих только независимую переменную. Второй этап заключается в переводе на язык алгебры логики определения поразрядной конъюнкции, используя новые обозначения для разрядов всех входящих числовых величин. Количество разрядов ограничивается разрядностью входящих в уравнение чисел в двоичной системе счисления. Результатом этого этапа является логическое уравнение нескольких логических переменных представленное в дизъюнктивной форме. Третий этап только на первый взгляд кажется эвристическим и легко формализуется. Из рассмотренного примера видно, что в случае наличия в уравнении дизъюнктов вида $x_i = 1$, соответсвующий разряд a_i числа A необходимо оказывается равным нулю. Остальным разрядам x_i, входящим в уравнение, соответствуют $a_i = 1$. Разряды не входящие в уравнение могут выбираться произвольно в зависимости от условия задачи.

Преимуществом данного подхода является его универсальность и простота. Он не ограничен уравнениями специфического вида (как подход из [Поляков]) и не требует приведения исходного уравнения к специальной форме с использованием теоретического материала выходящего за рамки школьной программы (как в [Поляков2]). Некоторым недостатком является значительное время, требуемое для проведения вычислений и преобразований. Необходимым условием применимости метода является выделение в виде дизъюнкта сравнения содержащего параметр (т.е. выражения вида $(x\&A = 0)$ или $(x\&A \neq 0)$), что иногда требует дополнительных преобразований с использованием законов алгебры логики.